

Международно състезание “Европейско Кенгуру”

22 март 2008 г.

ТЕМА за 11 и 12 клас

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Числата 3, 4 и две други неизвестни числа са разположени в четирите клетки на показаната таблица 2×2 . Известно е, че сумите на числата в редовете на таблицата са равни на 5 и 10, а сумата на числата в един от стълбовете е равна на 9. Намерете по-голямото от двете неизвестни числа.

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 3

2. Да се намери частното $\frac{x^{2008}}{y^{2008}}$, ако $x + y = 0$ и $x \neq 0$.

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2^{2008} E) $\frac{x}{y}$

3. Таблица е съставена от клетки, които са разположени в 21 стълба, номерирани с числата 1, 2, ..., 21 и 33 реда, номерирани с числата 1, 2, ..., 33. Ако се премахнат клетките от редовете, чиито номера не са кратни на 3, както и клетките от стълбовете, чиито номера са четни, колко клетки ще останат в таблицата?

- A) 110 B) 121 C) 115,5 D) 119 E) 242

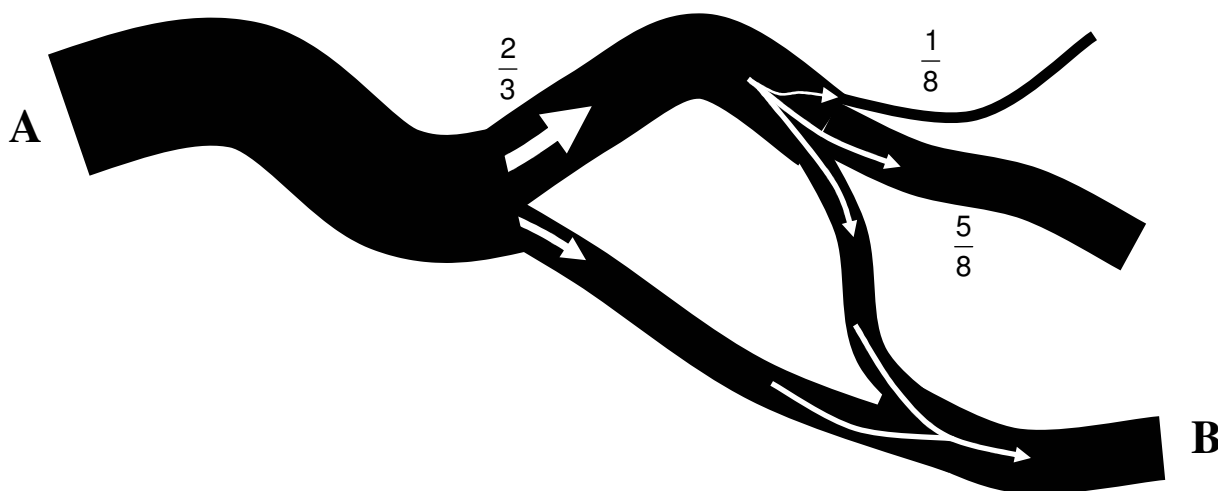
4. Колко са простите числа p , за които числото $p^4 + 1$ е също просто?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) безброй много

5. Една река извира от точката A и по трасето се разклонява на два потока. Първият поток поема $\frac{2}{3}$ от водата на реката, а вторият – останалото количество вода. По-късно първият

поток се разклонява на три нови потока, единият от които поема $\frac{1}{8}$ от водата, вторият поема

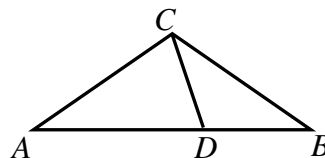
$\frac{5}{8}$, а третият – останалата вода. Последното трето разклонение се свързва с първоначалния втори поток, както е показано на фигурата. Каква част от първоначалното количество вода на реката преминава през точката B?



- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

6. Върху страната AB на равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) съществува точка D така, че $AD = AC$ и $DB = DC$. Да се намери мярката на $\angle ACB$.

- A) 98° B) 100° C) 104° D) 108° E) 110°



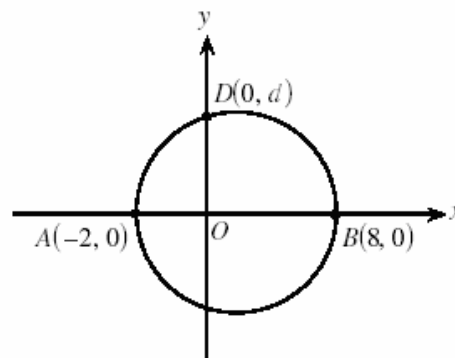
7. Намерете най-голямата стойност на функцията $f(x) = |5 \sin x - 3|$ за $x \in \mathbb{R}$.

- A) 2 B) 3 C) π D) 5π E) 8

8. На чертежа е показана окръжност с диаметър AB и точка D върху нея. Да се намери ординатата d на D , ако координатите на A и B са съответно $A(-2;0)$ и $B(8;0)$.

- A) 3 B) $2\sqrt{3}$ C) 4

- D) 5 E) 6



9. Върху права линия са взети последователно отляво надясно различни точки A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 , като не е задължително разстоянията между тях да са равни. Да се намерят всички точки P от правата така, че сумата от дължините на отсечките PA_1, PA_2, PA_3, PA_4 и PA_5 да е минимална.

- A) $P \equiv A_1$ B) $P \equiv A_2$ C) $P \equiv A_3$
D) P е произволна точка между A_2 и A_4 E) P е произволна точка между A_1 и A_5

10. Неда и нейната майка Тони искат да поставят две цифри на празните места в израза 2_8 така, че полученото 4-цифрено число да се дели на 3. По колко различни начина може да се направи това?

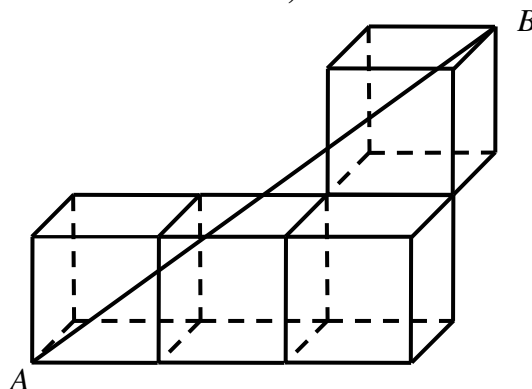
- A) 29 B) 30 C) 19 D) 20 E) 33

11. Дадени са седем числа: $-9; 0; -5; 5; -4; -1; -3$. Кое от тях трябва да се премахне така, че останалите шест да могат да се разделят на групи по две, като сумата на двете числа във всяка група да е една и съща?

- A) 5 B) 0 C) -3 D) -4 E) -5

12. Всяко от кубчетата на чертежа е с ръб 1. Намерете дължината на отсечката AB .

- A) $\sqrt{17}$ B) 7 C) $\sqrt{13}$
D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{14}$



13. Пет задачи са предложени на едно математическо състезание. Понеже задачите са с различна трудност, всяка от тях се оценява с различен брой точки (естествени числа). Косьо решил и петте задачи, като получил 10 точки за двете най-лесни и 18 точки за двете най-трудни задачи. Колко общо точки е получил Косьо на състезанието?

- A) 30 B) 32 C) 34 D) 35 E) 40

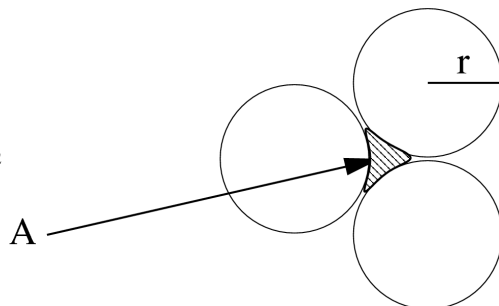
14. Матилда нарисувала 36 кенгурчета и ги оцветила с 3 различни цвята, като за 25 от тях използвала жълт цвят, за 28 – кафяв, а за 20 – черен цвят. Колко от кенгурчетата са едноцветни, ако за 5 от тях Матилда е използвала и трите цвята?

- A) 0 B) 4 C) 12 D) 31 E) не може да се определи

15. Три окръжности с един и същ радиус r се допират една до друга, както е показано на чертежа.

Да се намери лицето на частта A между тях.

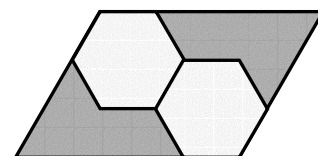
- A) $\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi\right)r^2$ B) $\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)r^2$ C) $\frac{1}{8}\pi r^2$
D) $\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\pi r^2$ E) $\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)r^2$



16. Двата шестоъгълника от чертежа са правилни и еднакви.

Каква част от лицето на успоредника заемат те?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{5}{12}$



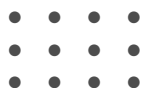
17. Числителят и знаменателят на една дроб са отрицателни числа, като числителят е с единица по-голям от знаменателя. Кое от посочените твърдения е вярното?

- A) Дробта е число, по-малко от -1 . B) Дробта е число между -1 и 0 .
C) Дробта е положително число, по-малко от 1 . D) Дробта е число, по-голямо от 1 .
E) Не може да се определи дали дробта е положителна или отрицателна.

18. Да се намери стойността на израза xuz , ако $x^2yz^3 = 7^3$ и $xy^2 = 7^9$.

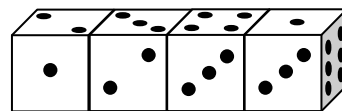
- A) 7^4 B) 7^6 C) 7^8 D) 7^9 E) 7^{10}

19. От показаните на фигурата точки са избрани 3 по случаен начин. Каква е вероятността избраните точки да лежат на една права?



- A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{3}{12}$

20. Четири идентични зарчета са поставени в редица, както е показано на фигурата. Върху стените на всяко зарче има 1, 2, 3, 4, 5 или 6 точки, като всеки две стени са с различен брой точки.



Зарчетата обаче не са стандартни, т.е. не е задължително сумата от точките на срещуположните им стени да е равна на 7. Намерете сумата от точките върху 6-те допиращи се две по две стени от фигурата.

- A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

21. Дължините в сантиметри на ръбовете на правоъгълен паралелепипед са цели числа, които образуват геометрична прогресия с частно 2. Коя от посочените стойности би могла да изразява обема на паралелепипеда?

- A) 120 cm^3 B) 188 cm^3 C) 216 cm^3 D) 350 cm^3 E) 500 cm^3

22. Всяка звездичка от фигурата вдясно замества определена цифра.

Намерете сумата от цифрите на крайния резултат в умножението.

- A) 16 B) 20 C) 26 D) 30 E) друг отговор

$$\begin{array}{r} \text{***} \\ \times 1 \text{**} \\ \hline 22 \text{**} \\ + 90 \text{*} \\ \text{**} 2 \\ \hline 56 \text{***} \end{array}$$

23. Да се намери стойността на израза $x^2 + y^2 + z^2$, ако $x + y + z = 1$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

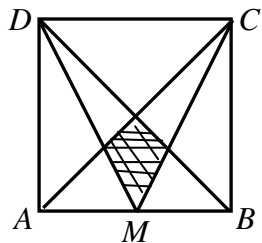
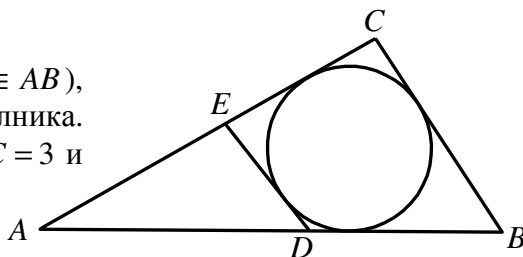
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) не е възможно да се намери

24. Дадена е редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, за която $a_1 = 0$ и $a_{n+1} = a_n + (-1)^n \cdot n$ за $n \geq 1$. Да се намери k , ако $a_k = 2008$.

- A) 2008 B) 2009 C) 4017 D) 4018 E) друг отговор

25. Даден е $\triangle ABC$ и отсечка ED ($E \in AC$ и $D \in AB$), която се допира до вписаната окръжност на триъгълника. Да се намери периметърът на $\triangle ADE$, ако $AB = 6$, $BC = 3$ и $CA = 5$.

- A) 7 B) 4 C) 9 D) 6 E) 8



26. Четириъгълникът $ABCD$ от чертежа е квадрат със страна 1 и точката M е средата на страната AB . Да се намери лицето на заштрихованата част от квадрата.

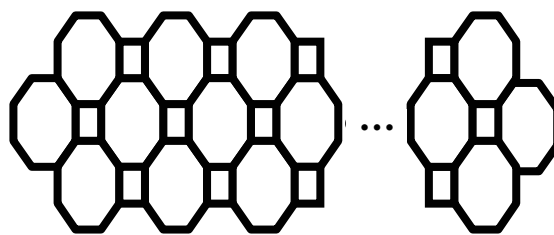
- A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{2}{13}$

27. Дадено е числото $A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2008}} \right)$. Елемент на кое от посочените множества е цялата част на A ?

- A) {40, 41} B) {43, 44} C) {46, 47} D) {49, 50} E) {52, 53}

28. Оградата от фигурата е ансамбъл от геометрични фигури, страните на които са метални рейки. Колко рейки са използвани за изработване на оградата, ако осмоъгълниците в нея са 61?

- A) 488 B) 400 C) 328 D) 244 E) 446



29. Намерете сумата от делителите на числото $3^{32} - 1$, които се намират между числата 75 и 85, но са различни от 75 и 85.

- A) 156 B) 162 C) 167 D) 245 E) друг отговор

30. Ако $\sin x + \cos x = m$, намерете стойността на $\sin^4 x + \cos^4 x$.

- A) $1 - \frac{(1-m^2)^2}{2}$ B) $1 + \frac{(1-m^2)^2}{2}$ C) $\frac{1-(1-m^2)^2}{2}$ D) m^4 E) $m^4 + 1$